Algorithmen und Datenstrukturen

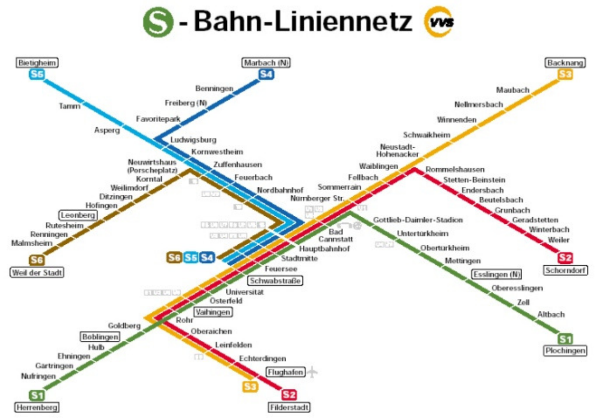
Teil 3:
Graphen (I): Grundbegriffe, Eigenschaften und Datenstrukturen

DHBW Stuttgart Campus Horb
Fakultät Technik
Studiengang Informatik
Dozent: Olaf Herden
Stand: 04/2019

Gliederung

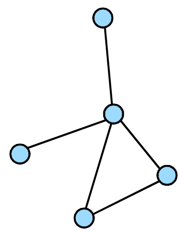
- Definitionen
- Operationen auf Graphen
- Eigenschaften von Graphen
- Datenstrukturen für Graphen

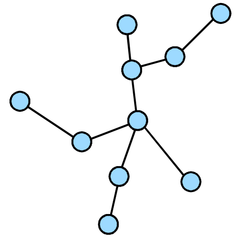
Motivation (I)



Einfärbung der Länder, so dass zwei Nachbarn keine gleichen Farben haben

Auffinden des kürzesten/ schnellsten Weges von A nach B

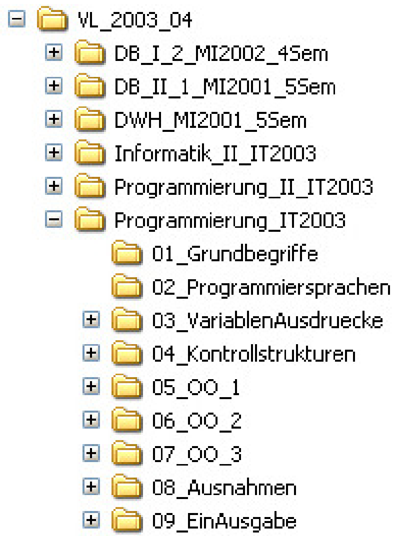




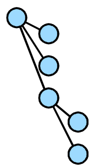
Punkte: Länder
Verbindungen: Nachbarschaft

Punkte: Orte/Bahnhöfe
Verbindungen: Strecke

Motivation (II)

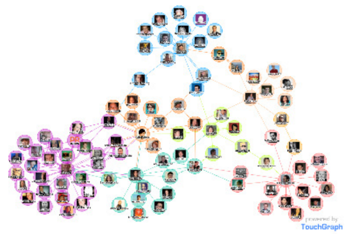


Durchsuchen aller Verzeichnisse einschl. Unterverzeichnissen ab bestimmtem Einstiegspunkt



Punkte: Verzeichnisse
Verb.: Verzeichnis-Unterverzeichnis-Beziehung

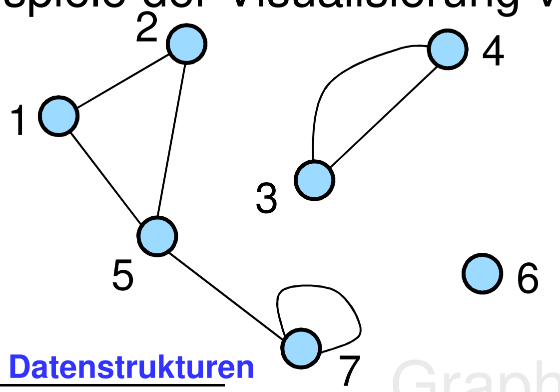
Auffinden „Freunde der Freunde“, „Personen mit ähnlichen Interessen“, etc.

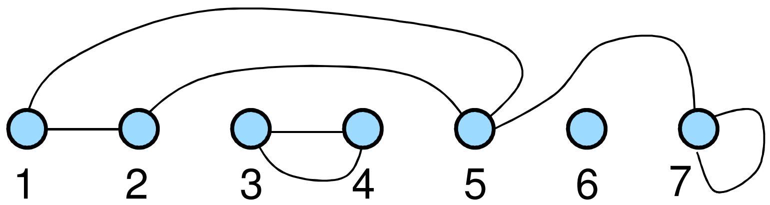


Punkte: Personen
Verb.: „Sich kennen“

Ungerichtete Graphen

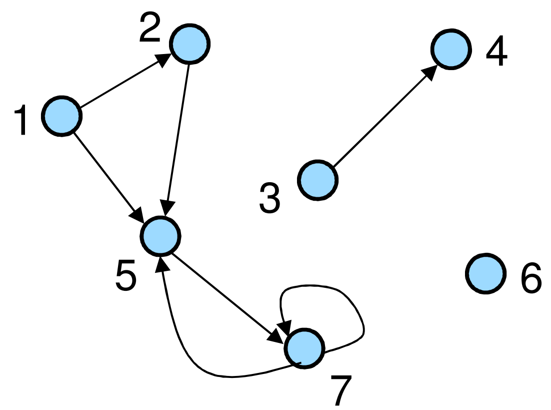
- Ein (ungerichteter) Graph G = (V,E) ist eine Struktur mit
  - V endliche Menge (Menge der Knoten oder Ecken, v = vertex)
  - E eine Menge ein- oder zweielementiger Teilmengen von V (Menge der Kanten, e = edge).
- Beispiel: G = ({1,2,3,4,5,6,7}, {{1,2}, {1,5}, {2,5}, {3,4}, {3,4}, {5,7}, {7}}).
- Die Knoten v_i, v_j einer Kante $\{v_i, v_j\}$ heißen Endknoten dieser Kante.
- Graphen werden meistens visualisiert:
  - Knoten als Punkte/Kreise
  - Kanten als Linien zwischen den Knoten
  - Wie die Knoten bzw. Kanten in der Ebene angeordnet werden, ist nicht vorgegeben; Frage der Zweckmäßigkeit, Lesbarkeit, Ästhetik, ...
  - Beispiele der Visualisierung von G:





Gerichtete Graphen

- Motivation: Manchmal ist es wichtig, von wo nach wo eine Kante verläuft (z.B. fährt der Zug von A nach B oder B nach A)
- Ein <u>gerichteter Graph</u> G = (V,E) ist eine Struktur mit
  - V endliche Menge (Menge der Knoten oder Ecken, v = vertex)
  - $E \subseteq V \times V$ (Menge der Kanten, e = edge).
- Beispiel: G = ({1,2,3,4,5,6,7}, {(1,2), (1,5), (2,5), (3,4), (5,7), (7,5), (7,7)}).
- Bezeichnungen:
  - In einer Kante $(v_i,v_j) \in E$ heißt v_i <u>Start- oder Quellknoten</u> und v_j <u>Ziel- oder Endknoten</u>
- Visualisierung: Pfeilspitze zum Zielknoten
- Beispiel:



Anmerkungen und Notationen

- Anmerkung:
  - In deutschsprachiger Literatur manchmal Definition G = (E,K) (E = Ecken, K = Kanten)
  - Kann zur Verwirrung führen (Bedeutung von E)!

- Notation und Sprechweisen: Sei G = (V,E) Graph, dann
  - Sagt man auch „G ist ein Graph auf V“
  - Schreibt man auch V(G) statt V
  - Schreibt man auch E(G) statt E
  - |V(G)| Ordnung oder Grad von G
  - Graphen der Ordnung 0 oder 1 werden als triviale Graphen bezeichnet
  - Kante mit gleichem Start- und Zielknoten bzw. gleichen Endknoten im ungerichteten Fall heißt Schlinge
  - Knoten ohne Kanten zu anderen Knoten, heißt isoliert
  - Existieren zwischen zwei Knoten zwei oder mehr Kanten, so spricht man von Zweifach-, Dreifach-, ... oder allgemein Mehrfachkante
  - Manchmal auch: Parallele Kanten

Inzidenz und Adjazenz

- Informal:
  - Inzidenz: Beziehung von Knoten zu Kanten
  - Adjazenz: Beziehung von Knoten untereinander
- Sei G = (V,E) ungerichteter Graph. Dann:
  - $v \in V$ heißt inzident zu $e \in E$, wenn $v \in e$
  - E(v) Menge aller zu $v \in V$ inzidenten Kanten
  - deg(v) := |E(v)| wird als Grad (Valenz) des Knoten v bezeichnet
  - $v_i, v_j \in V$ heißen adjazent (oder benachbart), wenn $\{v_i, v_j\} \in E$
- Sei G = (V,E) gerichteter Graph. Dann:
  - $E_{in}(v)$ Menge aller zu $v \in V$ eingehenden Kanten
  - $E_{out}(v)$ Menge aller von $v \in V$ ausgehenden Kanten
  - $deg_{in}(v) := | E_{in}(v) |$ Eingangsgrad von Knoten v
  - $deg_{out}(v) := | E_{out}(v) |$ Ausgangsgrad von Knoten v
  - $v_i, v_j \in V$ adjazent, wenn $(v_i, v_j) \in E$ oder $(v_j, v_i) \in E$
  - $v_i, v_j \in V$ stark adjazent, wenn $(v_i, v_j) \in E$ und $(v_j, v_i) \in E$

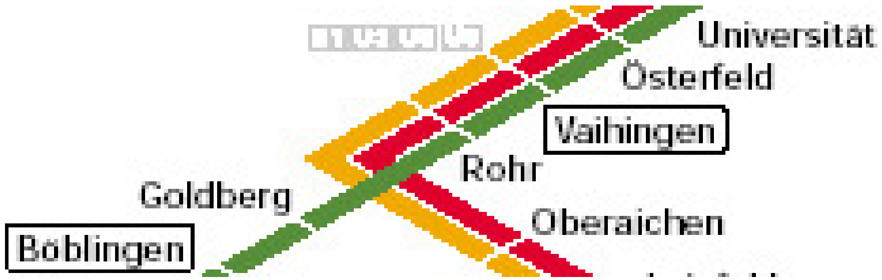
Markierte Graphen (I)

- Motivation:
  - Zusätzliche Informationen zu Knoten und/oder Kanten notwendig, z.B.:
    - Welche Farbe hat ein Land?
    - Wie lange dauert die Fahrt von Bahnhof A nach B?
- Dazu: Knoten und/oder Kanten mit entsprechenden Informationen versehen
- Man sagt: Graph ist knoten- bzw. kantenmarkiert.
- Definition: Sei $G = (V,E)$ ein (un)gerichteter Graph, M_V und M_E Mengen und $f : V \rightarrow M_V$ und $g : E \rightarrow M_E$ Abbildungen
  - $G' = (V,E,f)$ heißt <u>knotenmarkierter Graph</u>
  - $G'' = (V,E,g)$ heißt <u>kantenmarkierter Graph</u>
  - $G''' = (V,E,f,g)$ heißt <u>knoten- und kantenmarkierter Graph</u>
- Anm.: Mengen M_V und M_E häufig Zahlen oder Aufzählungstypen

Markierte Graphen (II)

- Beispiele:
  - V = {D, NL, B, CH, ...}
  - M_V = {gelb, hellblau, lila, ...}
  - f(D) = Lila, f(NL) = hellblau, f(B) = gelb

  - V = {Uni, Österfeld, Vaihingen, ...}
  - E = {(Uni,Österfeld),
    (Österfeld,Vaihingen), ...}
  - $M_E = \mathcal{R}^+$
  - g((Uni,Österfeld)) = 2
  - g((Österfeld,Vaihingen)) = 3
  - ...



Kantenfolge

- Sei G = (V,E) ein (un)gerichteter Graph und $k = (v_o, ..., v_n) \in V^{n+1}$ eine Folge von n+1 Knoten.
- Def.: k heißt <u>Kantenfolge</u> der Länge n von v_o nach v_n, wenn für alle $i \in \{0, ..., n-1\}$: $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- Bezeichnungen:
  - G gerichtet: v_o <u>Startknoten</u> und v_n <u>Endknoten</u>
  - G ungerichtet: v_o und v_n <u>Endknoten</u>
  - In beiden Fällen: Knoten v_1 bis v_{n-1} <u>innere Knoten</u>
- Def.: Gilt $v_o = v_n$: Kantenfolge <u>geschlossen</u>
- Anschaulich: Kantenfolge kann jeden Knoten (und implizit jede Kante) beliebig oft enthalten
- Def.: $k = (v_o)$ heißt <u>triviale Kantenfolge</u>

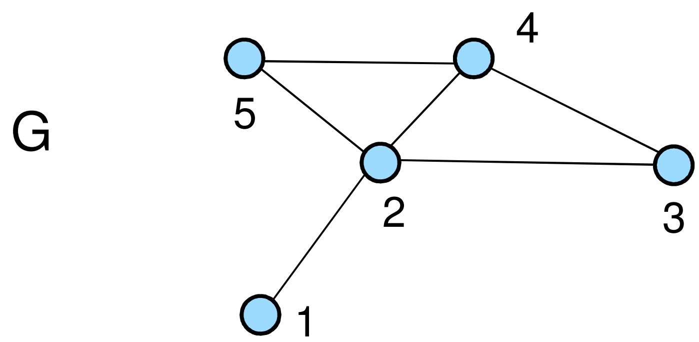
Kantenzug, Wege und Kreise

- Def.: k heißt <u>Kantenzug</u> der Länge n von v_o nach v_n, wenn
  - k Kantenfolge der Länge n von v_o nach v_n ist
  - für alle $i, j \in \{0, ..., n-1\}$ mit $i \neq j$: $(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$.
- Anschaulich: In Kantenzug kommt keine Kante mehrfach vor

- Def.: k heißt <u>Weg</u> (oder <u>Pfad</u>) der Länge n von v_o nach v_n, wenn
  - k Kantenfolge der Länge n von v_o nach v_n ist
  - für alle $i, j \in \{0, ..., n\}$ mit $i \neq j$: $v_i \neq v_j$.
- Anschaulich: In Weg kommt kein Knoten mehrfach vor

- Def.: k heißt <u>Kreis</u> oder <u>Zyklus der Länge n</u> (oder <u>n-Zyklus</u>) von v_o nach v_n, wenn
  - k geschlossene Kantenfolge der Länge n von v_o nach v_n ist
  - $k' = (v_o, ..., v_{n-1})$ ein Weg ist.
- Def.: Graph ohne Zyklus heißt <u>kreisfrei</u>, <u>zyklenfrei</u> oder <u>azyklisch</u>

Beispiel



- (1,2,3,4,5,2,3) ist Kantenfolge (aber nicht Kantenzug) der Länge 6 von 1 nach 3.
- (1,2,5,4,2,3) ist Kantenzug (aber nicht Weg) der Länge 5 von 1 nach 3.
- (1,2,5,4,3) ist Weg der Länge 4 von 1 nach 3.
- (2,3,4,5,2) ist Zyklus der Länge 4.

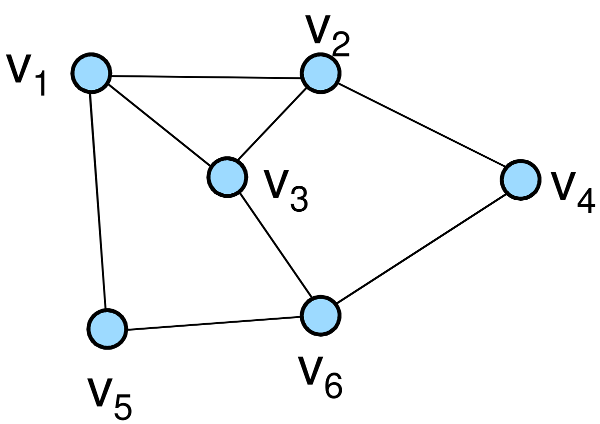
Übersicht

- Definitionen
- Operationen von Graphen
- Eigenschaften auf Graphen
- Datenstrukturen für Graphen

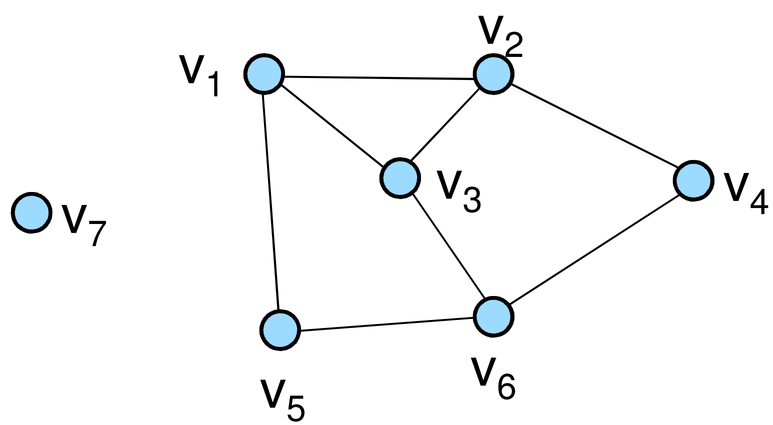
Hinzufügen Knoten

- Sei G = (V,E) ein Graph
- <u>Hinzufügen eines Knotens</u> v (Notation: G + v) erzeugt Graphen (V ∪ {v}, E)
- Beispiel:

G_1



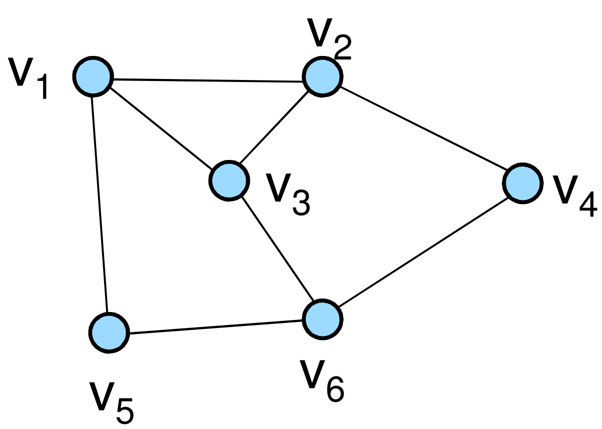
$G_1 + v_7$



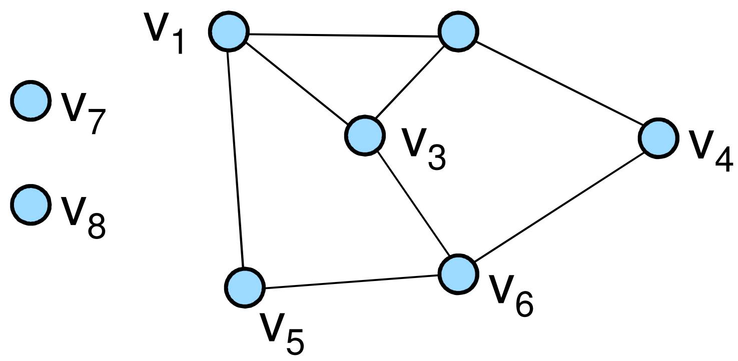
Hinzufügen Knotenmenge

- Sei G = (V,E) Graph, X Menge von Knoten
- Dann: G + X Graph, der durch Hinzufügen aller $x \in X$ zu G entsteht
- Beispiel:

G_1



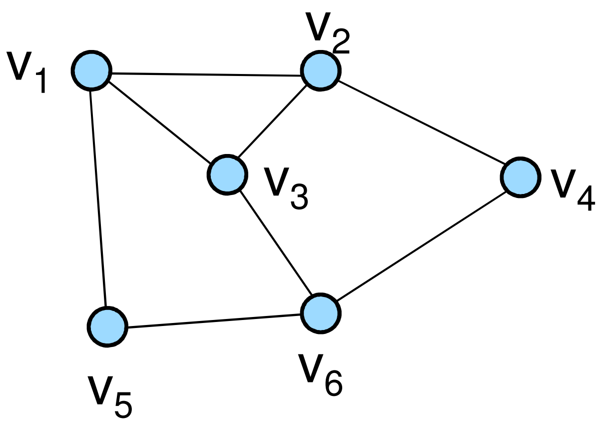
$G_1 + X$ mit $X = \{v_7, v_8\}$



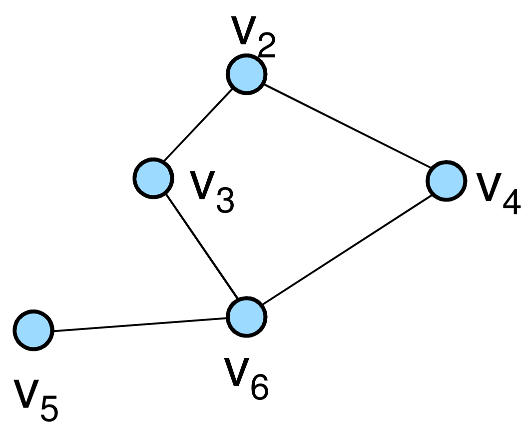
Entfernen Knoten

- Sei G = (V,E) ein Graph
- Entfernen eines Knotens $v \in V$ (Notation: $G - v$) erzeugt Graphen $(V \setminus \{v\}, E \setminus E(v))$, wobei $E(v)$ Menge aller zu v inzidenten Kanten
- Beispiel:

G_1



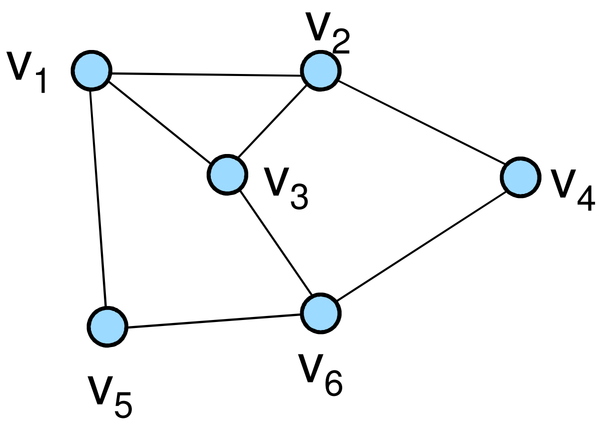
$G_1 - v_1$



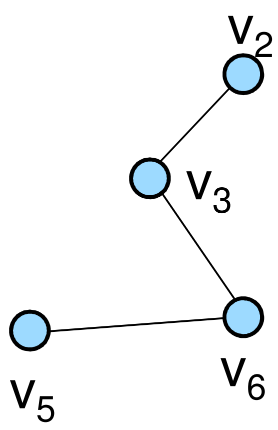
Entfernen Knotenmenge

- Sei $G = (V,E)$ ein Graph, $X \subseteq V$
- Dann: $G - X$ Graph $(V \setminus X, E \setminus E(X))$ mit $E(X)$ Menge aller Kanten, die zu mindestens einem $x \in X$ inzident sind
- Beispiel:

G_1



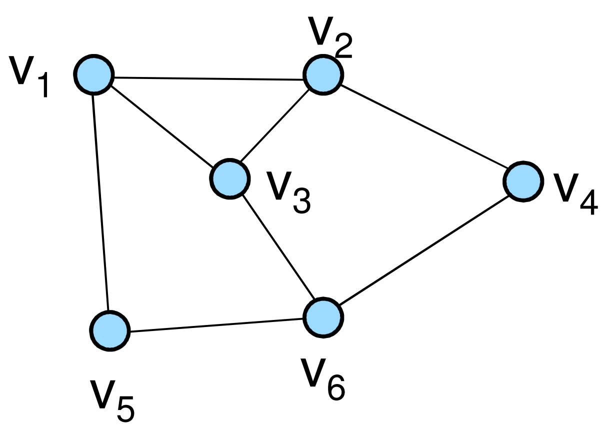
$G_1 - X$ mit $X = \{v_1, v_4\}$



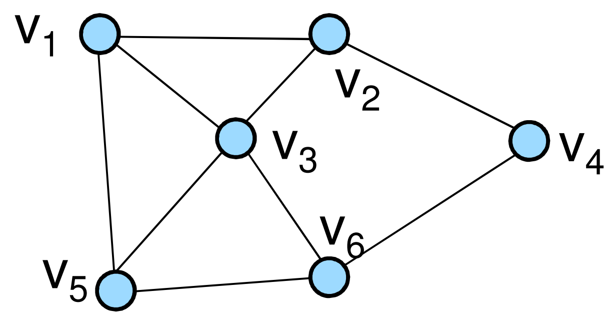
Hinzufügen Kante

- Sei G = (V,E) ein Graph
- Hinzufügen einer Kante e (Notation: G + e) erzeugt Graphen (V, E ∪ {e})
- Beispiel:

G_1



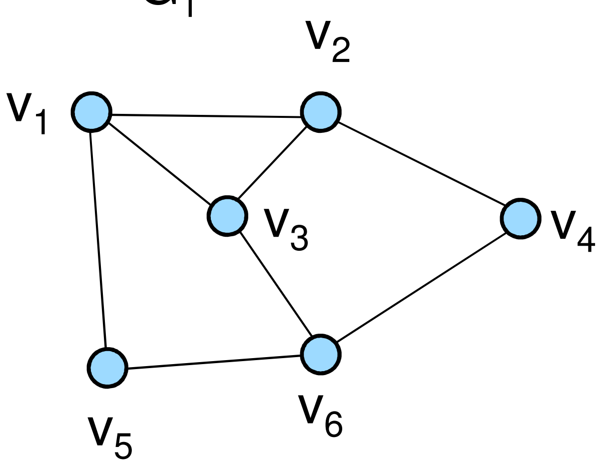
$G_1 + \{v_3,v_5\}$



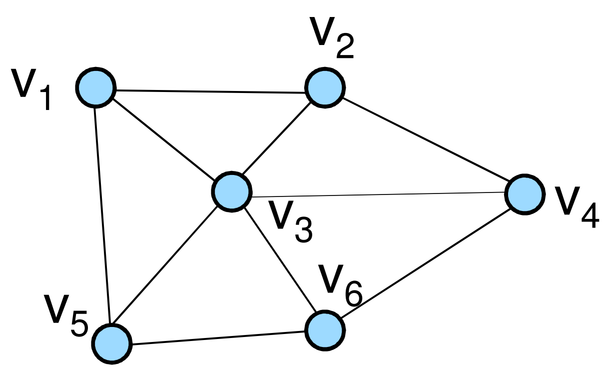
Hinzufügen Kantenmenge

- Sei G = (V,E) ein Graph
- Ist F Menge von Kanten, dann ist G + F Graph, der durch Hinzufügen aller $f \in F$ zu G entsteht
- Beispiel:

G_1

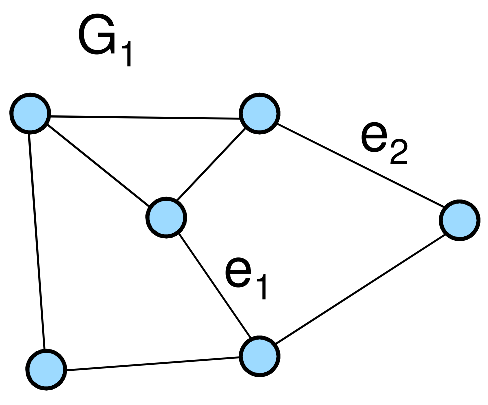


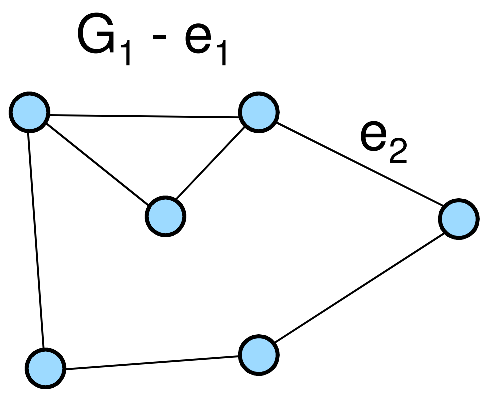
$G_1 + F$ mit $F=\{\{v_3,v_5\}, \{v_3,v_4\}\}$



Entfernen Kante

- Sei G = (V,E) ein Graph
- <u>Entfernen einer Kante</u> $e \in E$ (Notation: $G - e$) erzeugt Graphen $(V, E \setminus \{e\})$
- Beispiel:

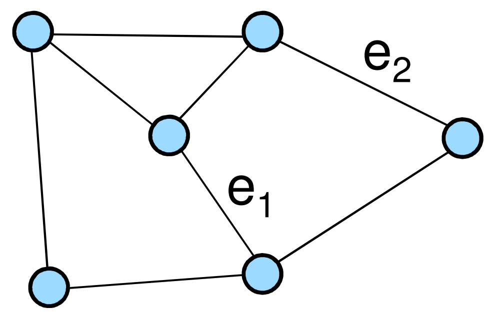




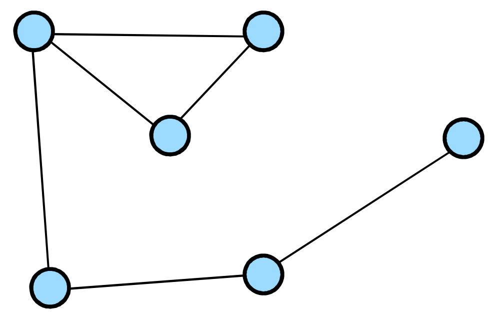
Entfernen Kantenmenge

- Sei G = (V,E) ein Graph
- Ist $F \subseteq E$, dann ist $G - F$ Graph, der durch Entfernen aller $f \in F$ aus G entsteht
- Beispiel:

G_1

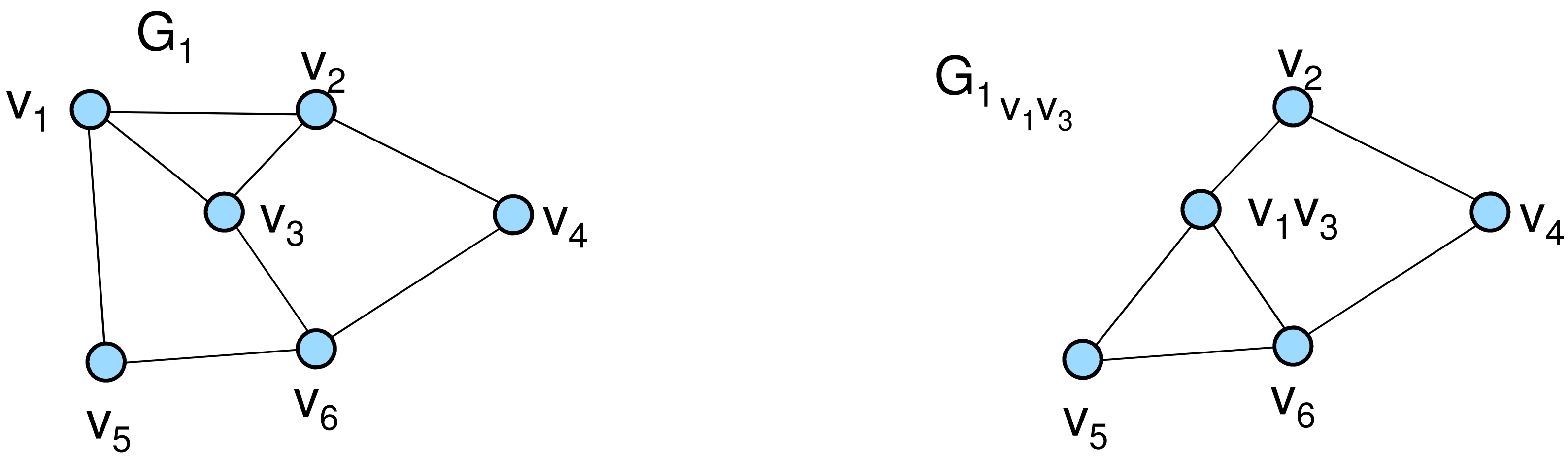


$G_1 - F$ mit $F=\{e_1, e_2\}$



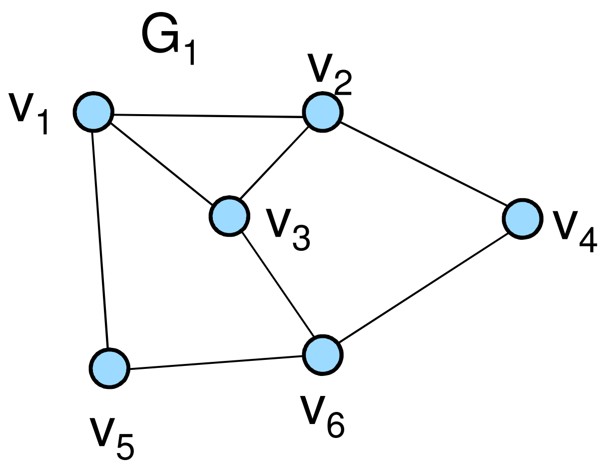
Fusion

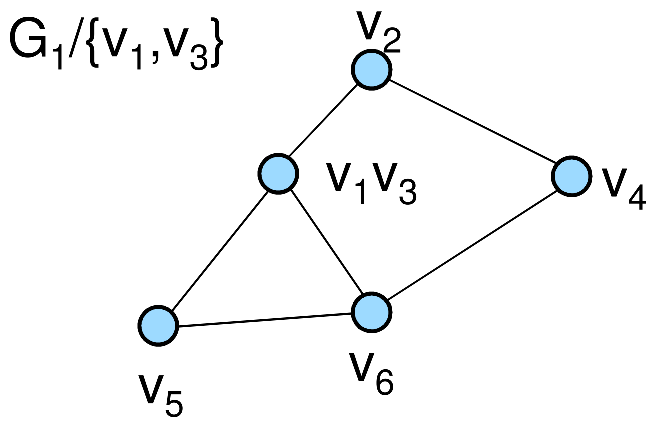
- Synonym: Verschmelzen
- Sei G = (V,E) ein Graph
- Fusion zweier Knoten u, v $\in$ V (Notation: G_{uv}) erzeugt Graphen
  - mit Knoten uv und allen Kanten, die vorher u oder v als Endknoten hatten
  - Mehrfachkanten zu uv werden entfernt
- Beispiel:



(Kanten-)Kontraktion

- Sei G = (V,E) ein Graph
- Kontraktion der Kante e={u,v} ∈ E (Notation: G/e) ist Entfernen von e mit anschließender Fusion von u und v
- Beispiel:



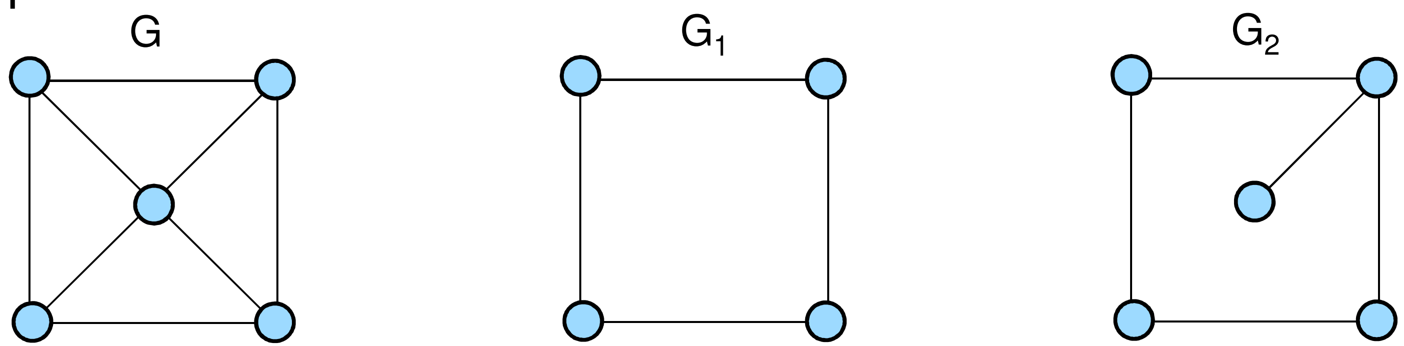


Übersicht

- Definitionen
- Operationen auf Graphen
- Eigenschaften von Graphen
- Datenstrukturen für Graphen

Teilgraph/Untergraph

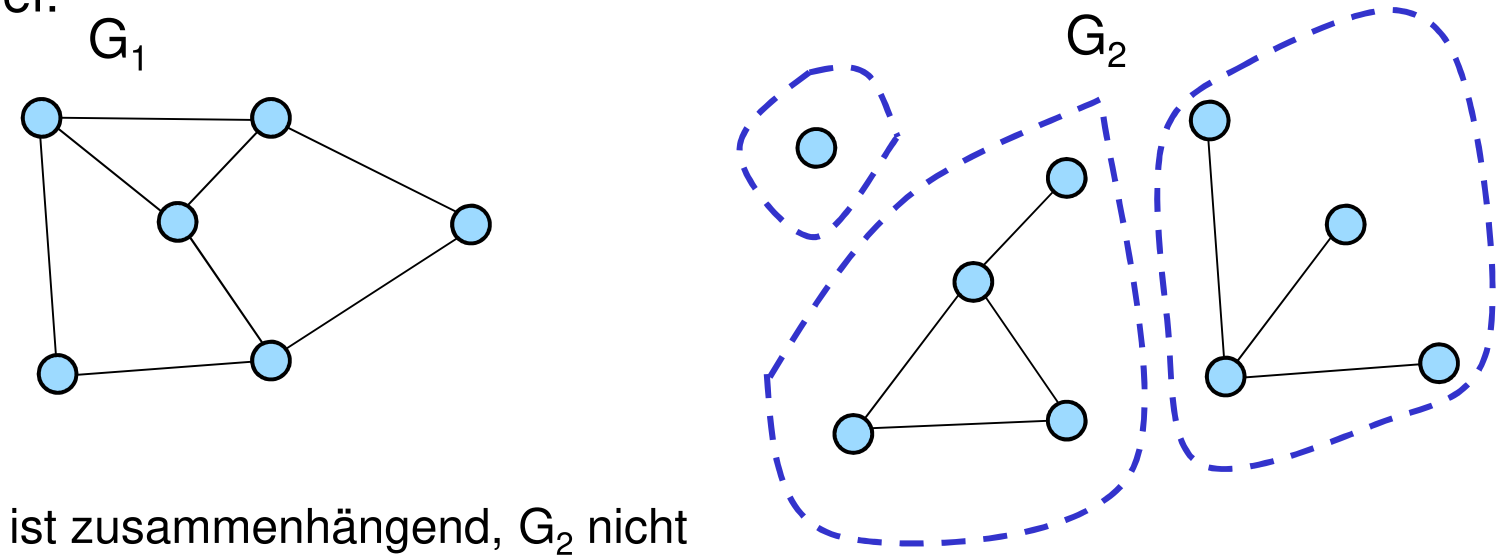
- Seien G und G‘ Graphen.
  Ist $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, dann heißt G‘ <u>Teilgraph</u> von G.
  Man sagt auch: G <u>enthält</u> den Graphen G‘.
- Sei G‘ Teilgraph von G.
  Enthält G‘ alle Kanten $(v_i,v_j) \in E$ mit $v_i,v_j \in V'$, dann heißt G‘ <u>Untergraph</u> von G.
  Man sagt auch: G‘ wird <u>induziert</u> (oder <u>aufgespannt</u>) von V‘ in G.
- Beispiel:



  - G_1 und G_2 sind Teilgraphen von G
  - G_1 ist Untergraph von G, G_2 nicht

Zusammenhängende Graphen

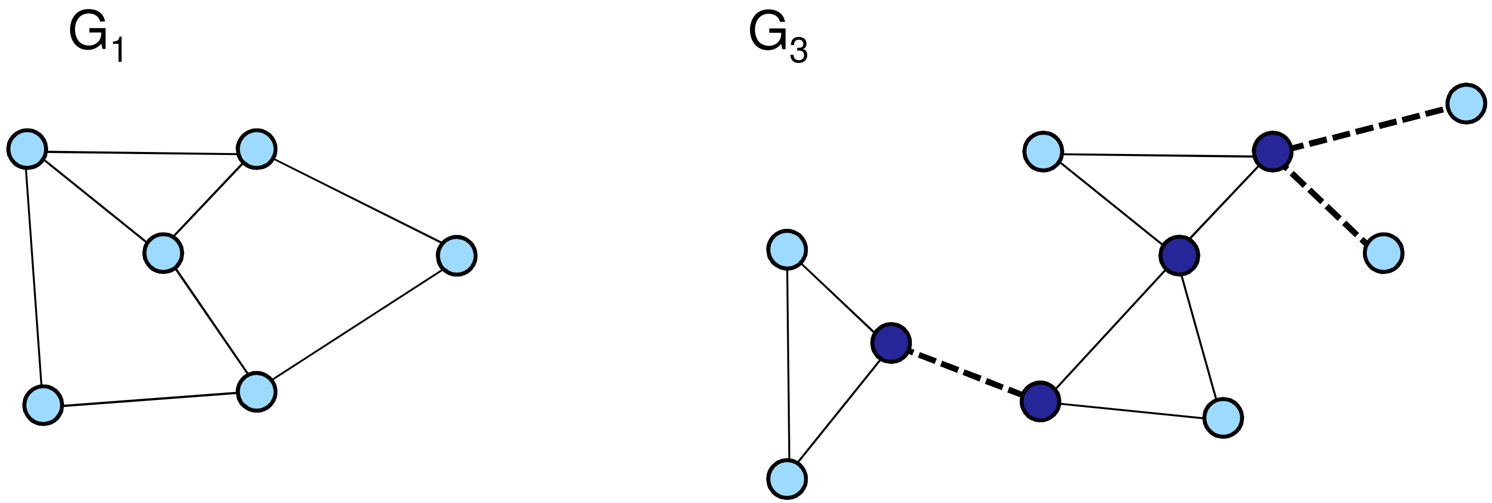
- Graph $G = (V,E)$ heißt <u>zusammenhängend</u>, wenn es für alle $v_i, v_j \in V$ Weg von v_i nach v_j gibt.
- Zerfällt Knotenmenge von G in disjunkte Teilmengen $G_1, ..., G_s$ und zu jedem G_i gehöriger Untergraph ist zusammenhängend, dann werden diese Untergraphen <u>Zusammenhangskomponenten</u> von G genannt.
- comp(G) := Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G.
- Beispiel:



  - G_1 ist zusammenhängend, G_2 nicht
  - comp(G_1) = 1, comp(G_2) = 3
  - G_2 besteht aus (zerfällt in) in drei Zusammenhangskomponenten

Brücke und Artikulation

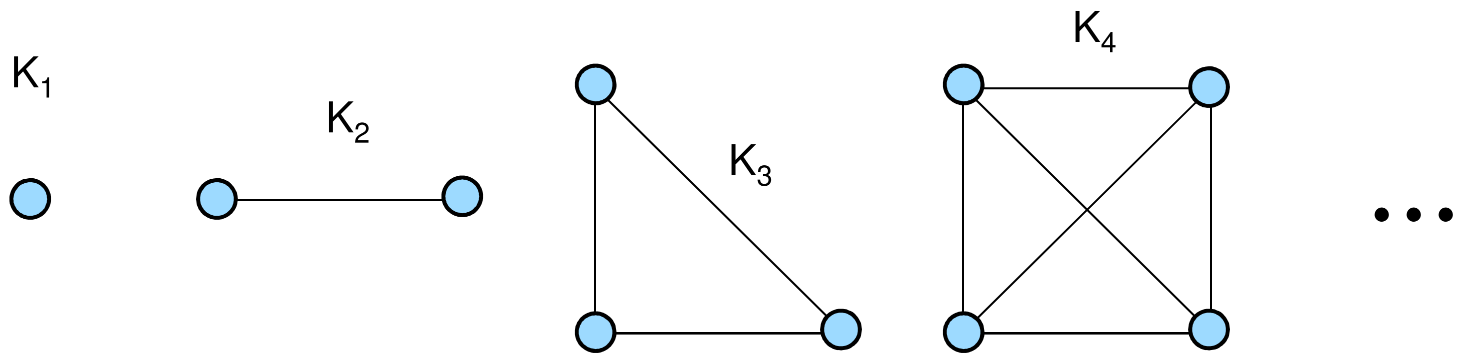
- Sei G = (V,E) Graph
- Kante e ∊ E heißt <u>Brücke</u>, wenn comp(G-e) > comp(G).
- Knoten v ∊ V heißt <u>Artikulation</u>, wenn comp(G-v) > comp(G).
- Beispiel:



- G1 besitzt keine Brücken und keine Artikulationen
- G3: ● Artikulationen, ------ Brücken

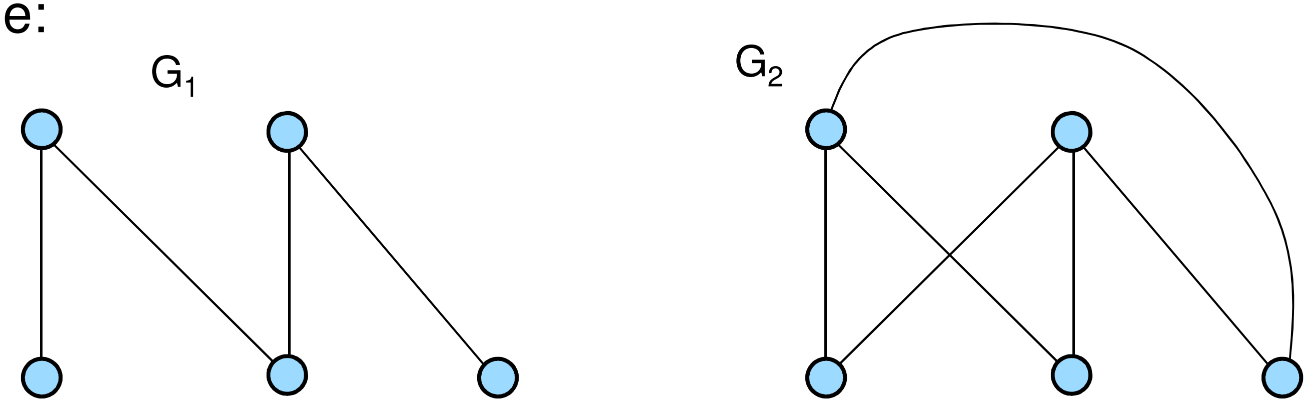
Vollständige Graphen

- Ein Graph G = (V,E) heißt <u>vollständig</u>, wenn je zwei Knoten $v_i, v_j \in V$ benachbart sind.
- Zu jeder Knotenzahl gibt es genau einen vollständigen Graphen, der als K_n bezeichnet wird.
- Beispiele:



Bipartite Graphen

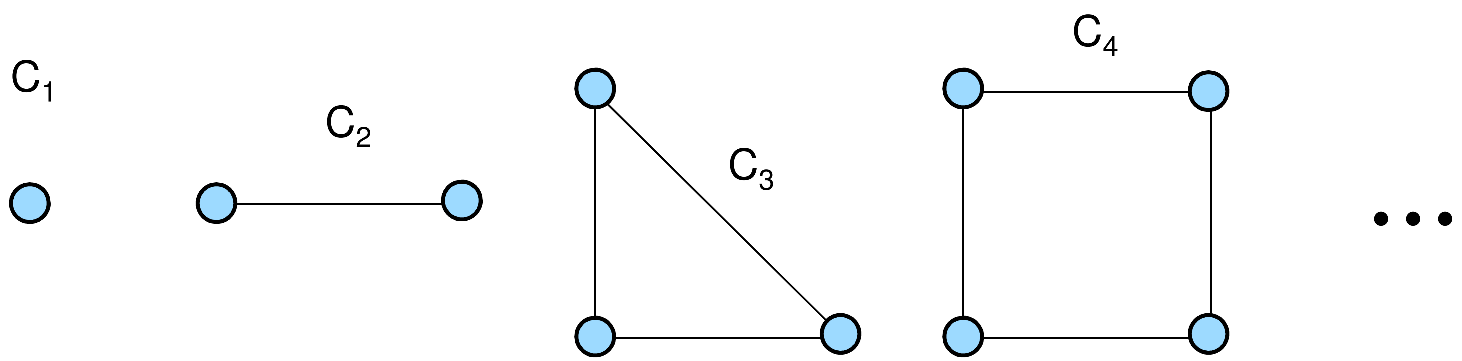
- Graph G = (V,E) heißt <u>bipartit</u>, falls sich die Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen V‘ und V“ zerlegen lässt, so dass weder Knoten aus V‘ noch solche aus V“ benachbart sind.
- Graph G = (V,E) heißt <u>vollständig bipartit</u>, falls G bipartit ist und jeder Knoten v‘$\in$ V‘ mit jedem Knoten v“$\in$ V“ benachbart ist.
- Vollständig bipartiter Graph mit |V‘|=n und |V“|=m wird als $K_{m,n}$ bezeichnet.
- Beispiele:



  - G_1 ist bipartit, aber nicht vollständig bipartit
  - G_2 ist vollständig bipartit, es ist der $K_{3,2}$
- Anm.: $K_{1,n}$ heißt auch <u>Stern</u>

Zyklische Graphen

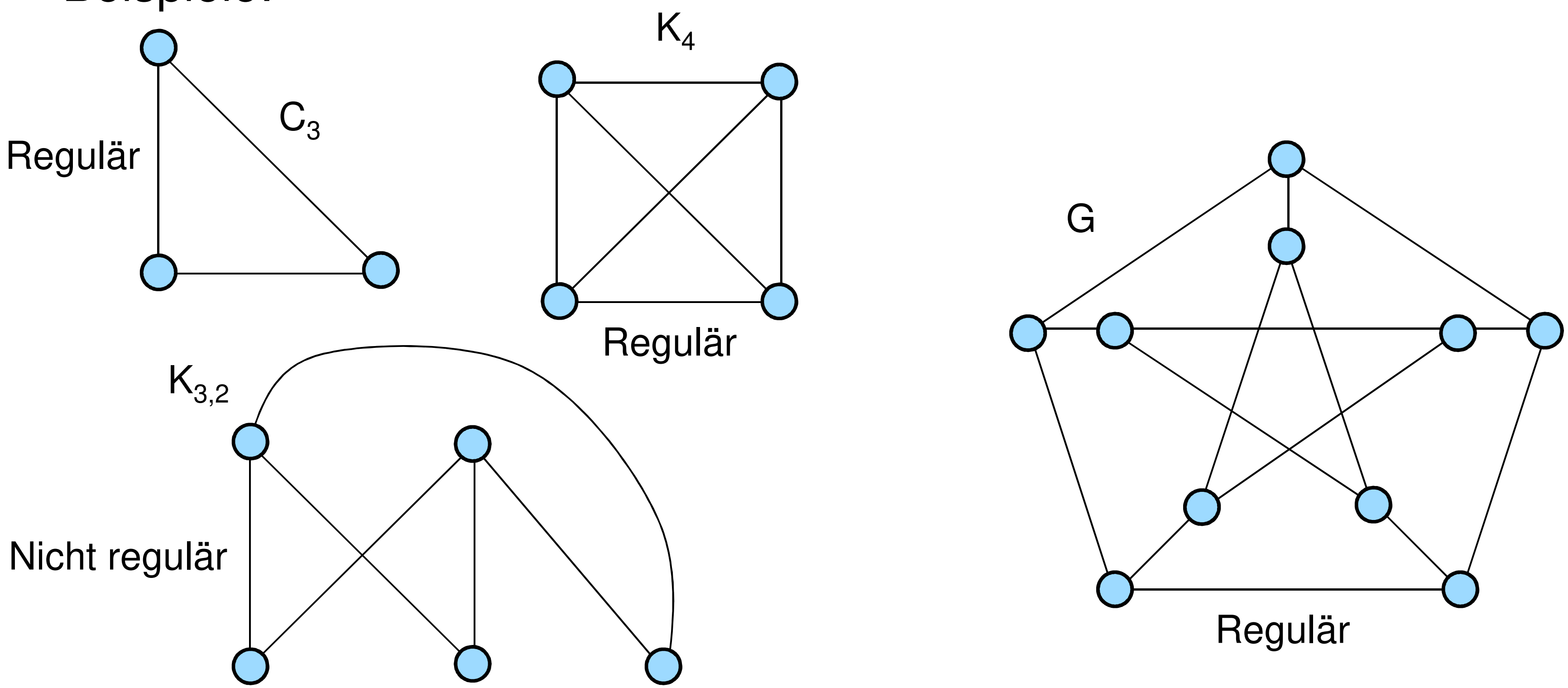
- Synonym: Kreis
- Graph G = (V,E) heißt zyklisch, wenn G aus einem einfachen geschlossenen Weg besteht.
- Zyklischer Graph mit n Knoten heißt C_n.
- Beispiele:



- Anmerkung: Für $n \leq 3$: $K_n = C_n$

Reguläre Graphen

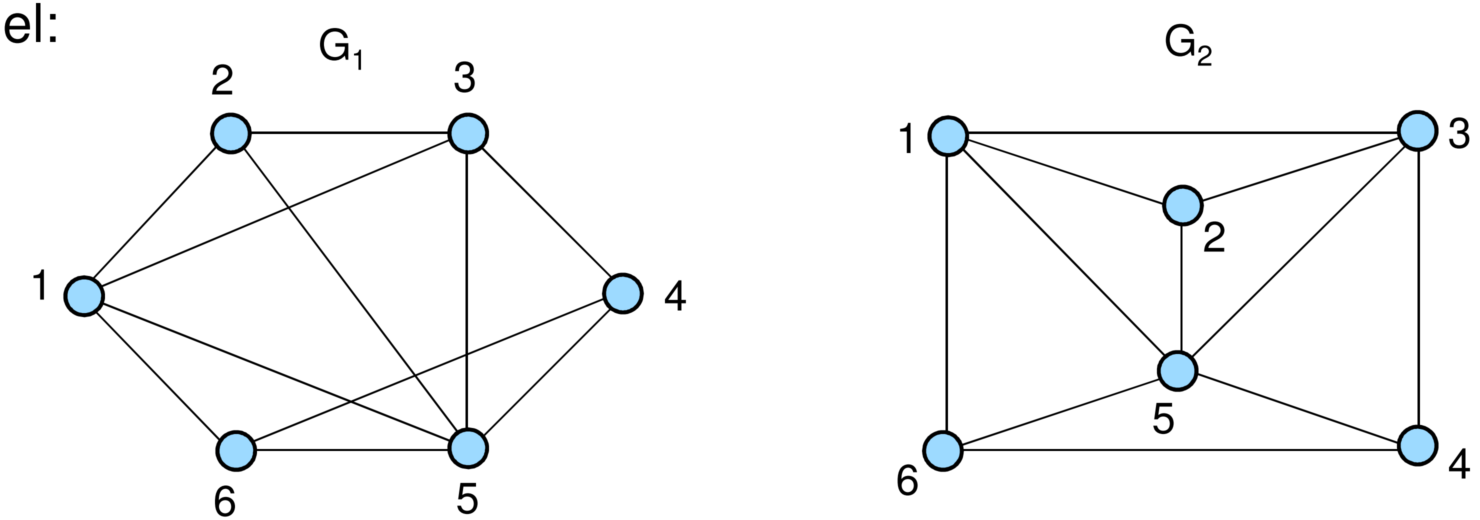
- Sei G = (V,E) ein Graph.
- Hat jeder Knoten v∈V gleichen Grad, dann heißt G <u>regulär</u>.
- Beispiele:



- Graphen C_n, K_n regulär für alle n
- Graphen $K_{n,m}$ sind regulär für n=m und nicht regulär für n≠m
- Graph G heißt nach seinem „Entdecker" Petersengraph

Planare Graphen

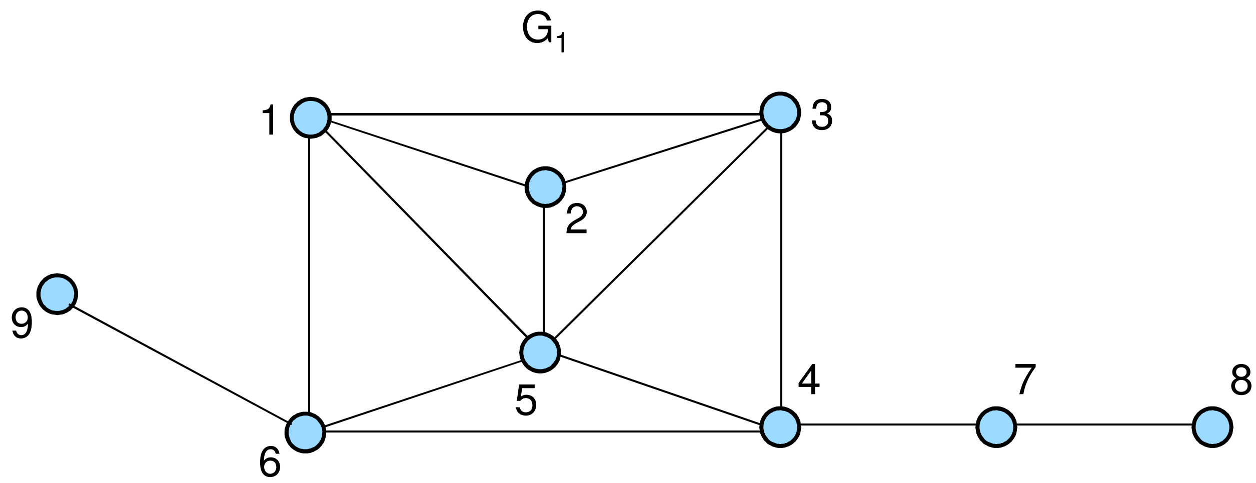
- Graph G = (V,E) heißt planar (oder plättbar oder eben), wenn in der Ebene kreuzungsfreie Darstellung von G existiert.
- Beispiel:



  - G_1 ist planarer Graph (G_2 ist ein Beispiel seiner kreuzungsfreien Darstellung)
  - Graphen $K_{3,3}$ und K_5 sind nicht planar:
    - Haben besondere theoretische Bedeutung
    - Sind „kleinste“ nicht-planare Graphen

Distanz und Extrenzität (I)

- Sei Graph G = (V,E)
- Distanz(v,v‘) := Minimaler Abstand zwischen v und v‘ in Kanten
- Extrenzität(v) := Maximum aller Distanzen von v
  (Maximaler Abstand zu allen anderen v‘ $\in$ V)
- Beispiel:



Distanz und Extrenzität (II)

- Distanz:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	2	1	1	3	4	2
2	1	0	1	2	1	2	3	4	3
3	1	1	0	1	1	2	2	3	3
4	2	2	1	0	1	1	1	2	2
5	1	1	1	1	0	1	2	3	2
6	1	2	2	1	1	0	2	3	1
7	3	3	2	1	2	2	0	1	3
8	4	4	3	2	3	3	1	0	4
9	2	3	3	2	2	1	3	4	0

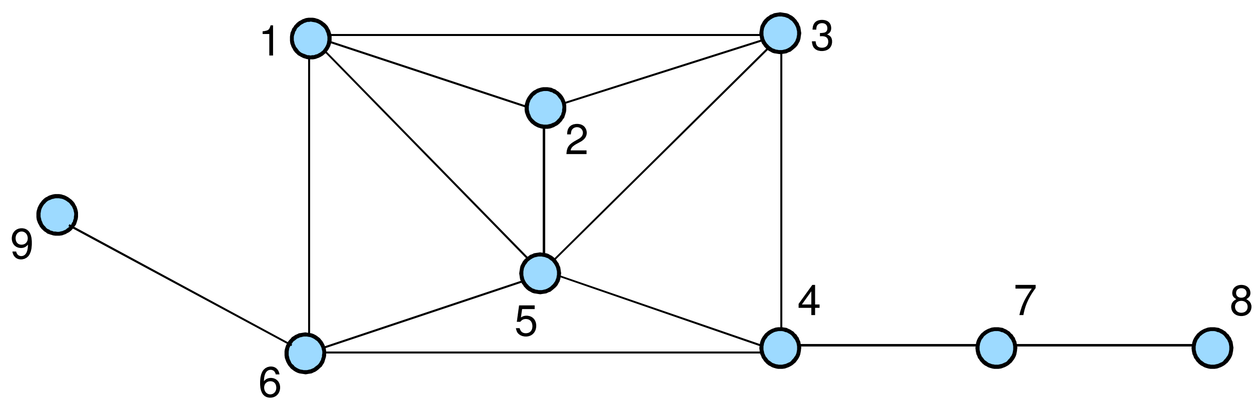
- Extrenzität:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	4	3	2	3	3	3	4	4

Rand, Durchmesser, Radius, Zentrum

- Rand(G) := Menge der Knoten mit maximaler Exzentrizität
- Durchmesser(G) := Größter Abstand zwischen zwei Knoten
- Radius (G) := Minimum der Exzentrizität
- Zentrum (G) := Knoten, deren Exzentrizität gleich Radius
- Beispiel:

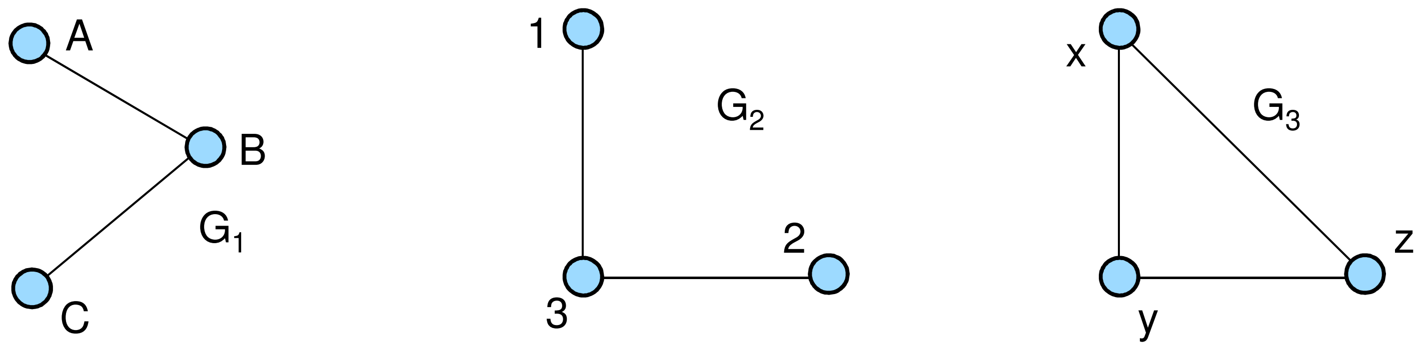
G_1



Eigenschaft	Wert
Rand(G_1)	{1-2-8-9}
Durchmesser(G_1)	4
Radius(G_1)	2
Zentrum(G_1)	{4}

Isomorphie von Graphen

- Seien G_1, G_2 Graphen. G_1 und G_2 sind <u>isomorph</u> ($G_1 \cong G_2$), wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit $(v_i,v_j) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in E_2$.
- Beispiel:



  - $G_1 \cong G_2$ (φ(A)=1, φ(B)=3, φ(C)=2)
  - G_3 ist nicht isomorph zu den beiden anderen Graphen (ungleiche Kantenzahl)

Übersicht

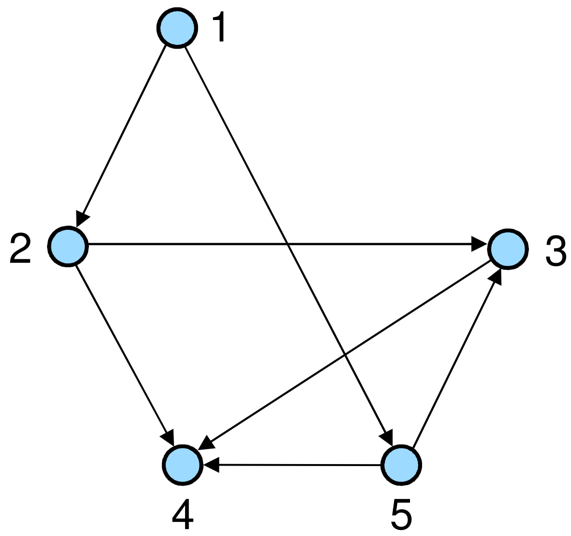
- Definitionen
- Operationen auf Graphen
- Eigenschaften von Graphen
- Datenstrukturen für Graphen

Anforderungen

- Vollständige Darstellung aller Informationen, d.h.
  - von Knoten
  - von Kanten
  - von möglicherweise vorliegenden Markierungen
- Möglichst effizientes Durchführen wichtiger lesender Operationen, z.B.
  - Adjazenz zweier Knoten feststellen
  - Bestimmung aller Nachbarn eines Knoten (ungerichteter Graph)
  - Bestimmung aller Vorgänger bzw. Nachfolger eines Knoten (gerichteter Graph)
- Möglichst effizientes Durchführen von Änderungsoperationen, z.B. Fusion und Kontraktion
- Möglichst geringer Speicherplatz für das Darstellen der Struktur
- Häufig: Wechselwirkung, d.h. Realisierung effizienter Strukturen geht zu Lasten des Speicherplatzes („Time-Space-Tradeoff“)

Adjazenzmatrix (I): Definition

- Darstellung eines Graphen als n x n-Matrix mit n Anzahl Knoten
- Matrix-Eintrag an Stelle (i,j) ist 1, falls es eine Kante von Knoten v_i nach v_j gibt, ansonsten 0
- Matrix spiegelt Knoten-Nachbarschaft wieder, daher Adjazenzmatrix
- Beispiel:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzmatrix (II): Eigenschaften

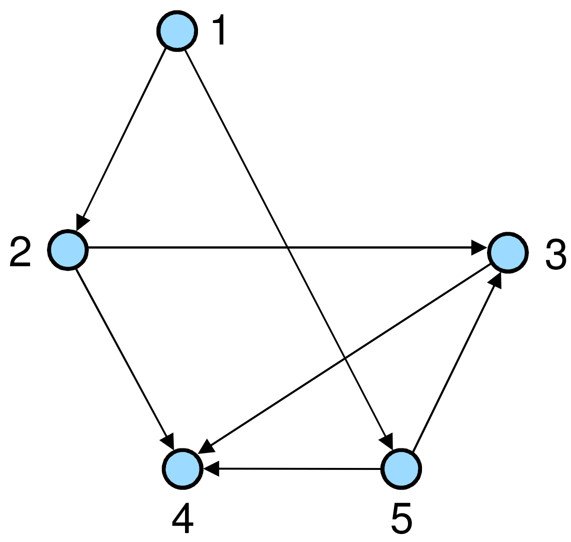
- Bei ungerichteten Graphen ist Adjazenzmatrix stets symmetrisch
- Wert 1 auf Diagonalelement zeigt Schlinge an
- Mehrfachkanten durch Eintragen er Kantenanzahl statt 0/1
- Kantenmarkierungen: Statt 0/1 Markierung in Matrix eintragen
- Knotenmarkierungen: Separate Liste/Feld

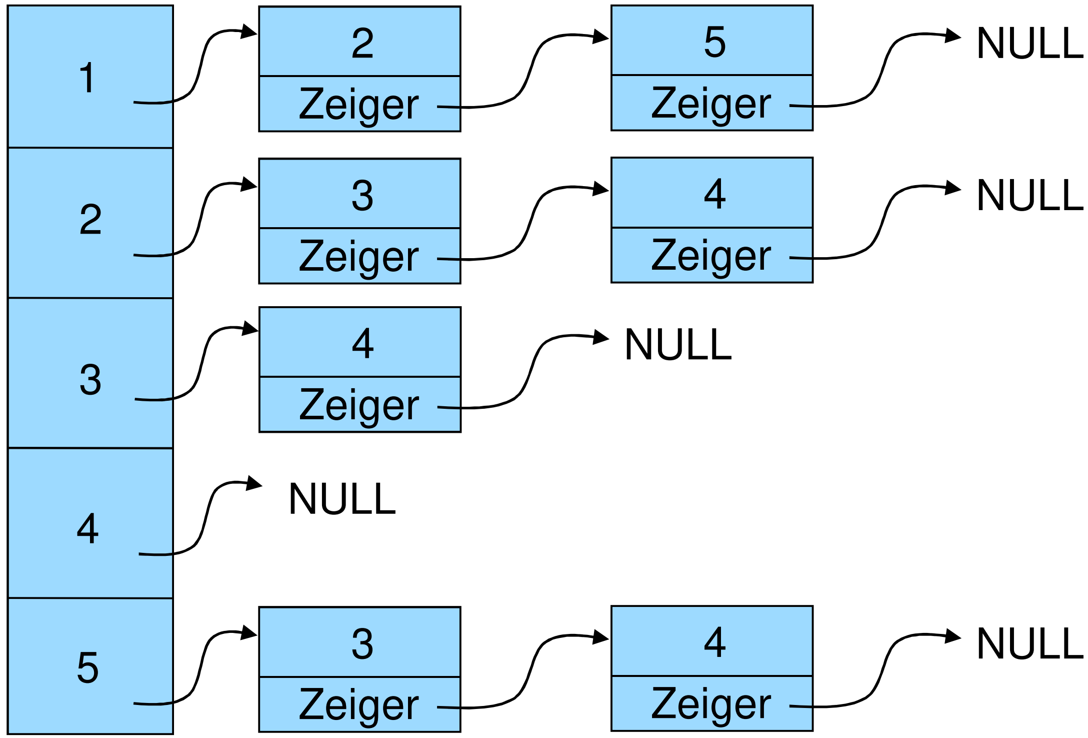
Adjazenzmatrix (III): Bewertung

- Erlaubt Darstellung gerichteter wie ungerichteter Graphen
- Erlaubt vollständige Darstellung inkl. Markierungen
- Lesende Operationen:
  - Adjazenz zweier Knoten unabhängig von Größe feststellbar
  - Bestimmung aller Nachbarn eines Knoten (ungerichteter Graph) bzw. aller Vorgänger bzw. Nachfolger eines Knoten (gerichteter Graph):
    - Durchsehen der i-ten Zeile/Spalte der Adjazenzmatrix (abhängig von Knotenzahl)
- Ändernde Operationen: Schwierig wegen fester Matrixgröße
- Speicherplatz:
  - Immer n^2 Speicherplätze
  - Relativ ineffizient:
    - Bei Graph mit relativ wenig Kanten sind viele Einträge 0 (Dünn/spärlich besetzte Matrix)
    - Bei ungerichteten Graphen aufgrund der Symmetrie auch etwa halber Speicherplatz ausreichend

Adjazenzlisten (I): Definition

- In Adjazenzlisten wird
  - Ein Feld der Knoten angelegt
  - Jeder Feldeintrag ist Anker einer Liste der Nachbarn dieses Knoten
- Beispiel:





Adjazenzlisten (II): Eigenschaften

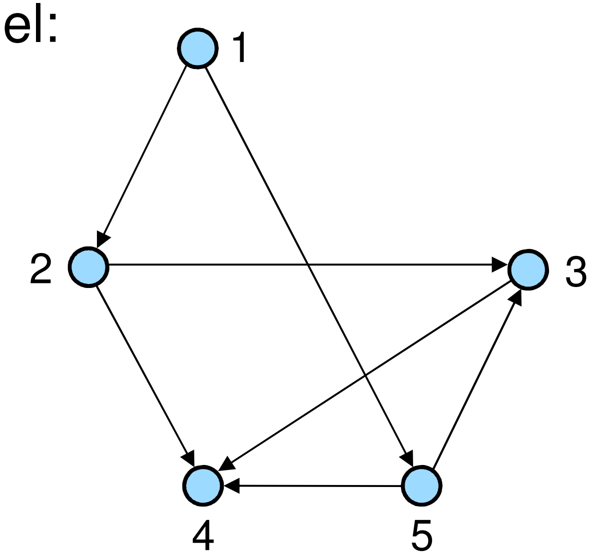
- Kantenmarkierungen: Kann beim Listeneintrag hinzugefügt werden
- Knotenmarkierungen: Kann beim Feld der Knoten hinzugefügt werden

Adjazenzlisten (III): Bewertung

- Erlaubt Darstellung gerichteter wie ungerichteter Graphen
- Erlaubt vollständige Darstellung inkl. Markierungen
- Lesende Operationen:
  - Adjazenz zweier Knoten: Durchsuchen entsprechender Liste
  - Bestimmung aller Nachbarn eines Knoten (ungerichteter Graph) bzw. aller Nachfolger eines Knoten (gerichteter Graph):
    - Sehr effizient (Ergebnis liegt schon vor)
  - Bestimmung aller Vorgänger eines Knoten (gerichteter Graph): Relativ aufwändig, alle Nachbarlisten des Knoten müssen durchsucht werden
- Ändernde Operationen: Effizienter als in Matrix
- Speicherplatz:
    - Für gerichteten Graphen n+m Speicherplätze
    - Für ungerichteten Graphen n+2m Speicherplätze
    - Bei Graphen mit relativ wenigen Kanten (dünn besetzte Matrix) erheblich effizienter als Adjazenzmatrix

Adjazenzlisten (IV): Alternative Darstellung

- Alternative zur Realisierung mit Zeigern: Realisierung von Adjazenzlisten durch zwei Felder:
  - Feld A zum Abspeichern der Nachbarn
  - Nachbarn in A lückenlos abgelegen (zuerst die von Knoten 1, dann von Knoten 2, usw.)
  - Festlegung, an welcher Position die Nachbarn eines bestimmten Knotens beginnen, durch zweites Feld N
  - N enthält die Indizes der Anfänge der Nachbarlisten, d.h. die Nachbarn von Knoten i sind in den Komponenten A[N[i]] bis A[N[i+1]]-1 abgelegt
- Beispiel:



N:

1	2	3	4	5
1	3	5	6	6

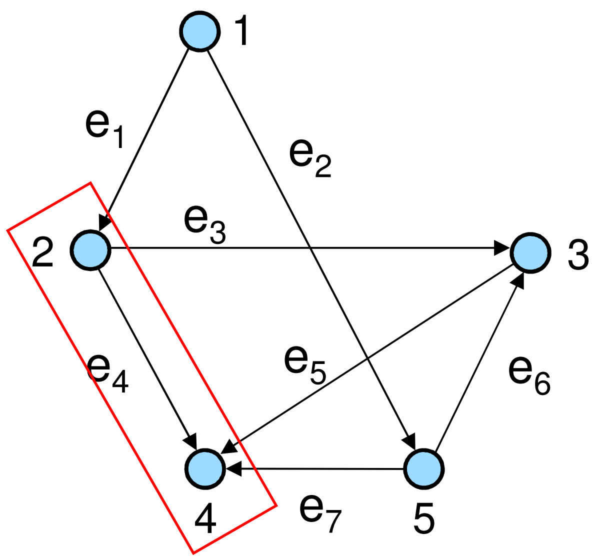
A:

1	2	3	4	5	6	7
2	5	3	4	4	3	4

Nachbarschaftslisten der Knoten 1,2,3 und 5

Inzidenzmatrix (I): Definition

- G mit n Knoten und m Kanten wird als nxm-Matrix I dargestellt
- Wert an Komponente (i,j) der Matrix gibt Inzidenz von Knoten i mit Kante j an:
  - Ungerichteter Graph: $I_{ij} := \begin{cases} 1, \; falls \; v_i \in e_j \\ 0, \; sonst \end{cases}$
  - Gerichteter Graph: $I_{ij} := \begin{cases} 1, \; falls \; e_j = (v_i, x) \\ -1, \; falls \; e_j = (x, v_i) \\ 0, \; sonst \end{cases}$
- Beispiel:



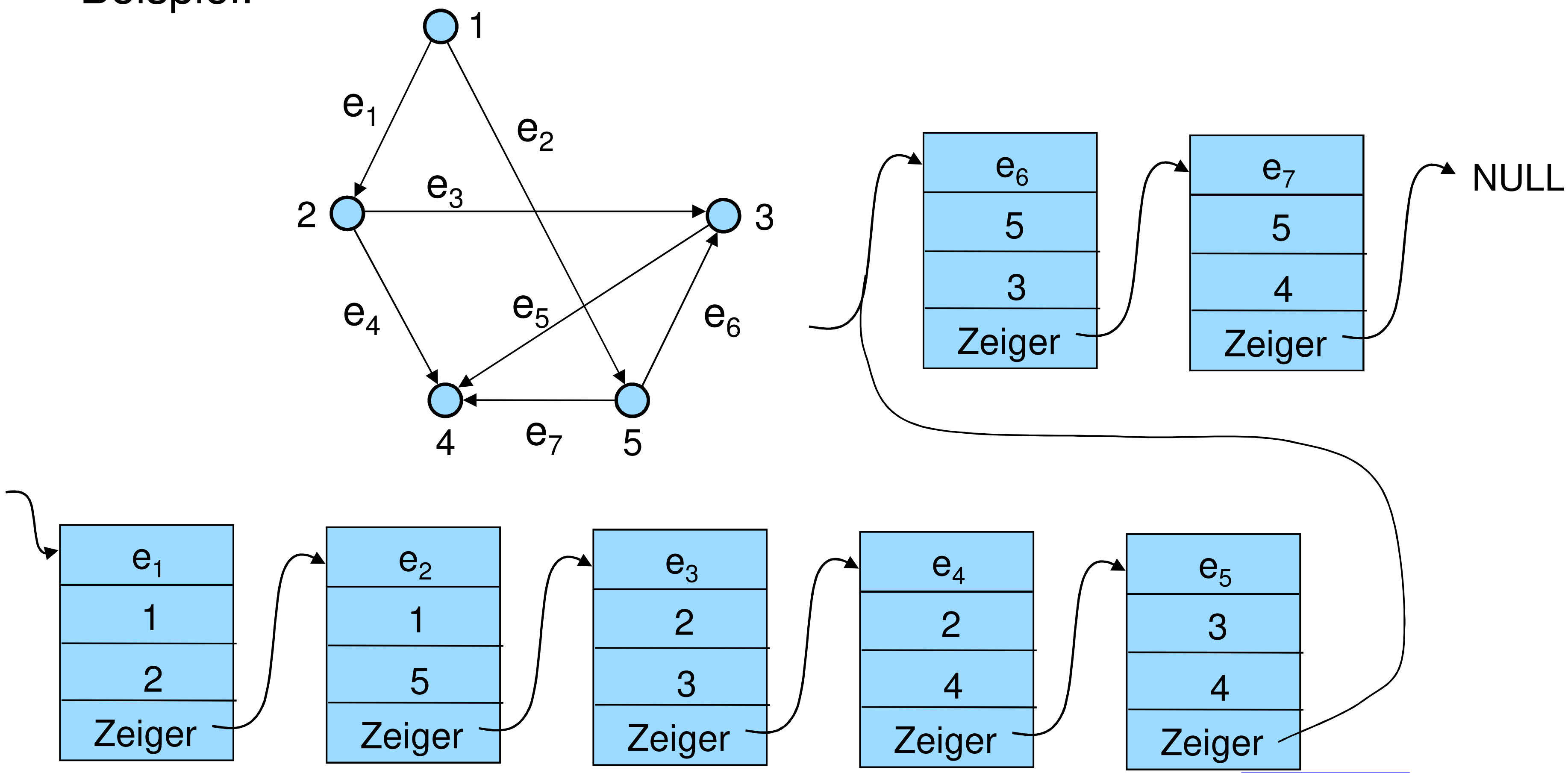
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \boxed{0} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inzidenzmatrix (II): Bewertung

- Erlaubt Darstellung gerichteter wie ungerichteter Graphen
- Markierungen:
  - Kanten: Einträge in Matrix Markierung statt 0/1
  - Knoten: Separates Feld
- Lesende Operationen:
  - Inzidenz zwischen Knoten und Kante unabhängig von Größe feststellbar
  - Bestimmung aller Nachbarn eines Knoten (ungerichteter Graph) bzw. aller Vorgänger bzw. Nachfolger eines Knoten (gerichteter Graph):
    - Durchsehen der i-ten Zeile der Inzidenzmatrix (abhängig von Kantenzahl)
  - Effizient, wenn von Kante ausgehend inzidente Knoten benötigt werden
- Ändernde Operationen: Schwierig wegen fester Matrixgröße
- Speicherplatz:
  - Immer nxm Speicherplätze
  - Ineffizient:
    - Jede Spalte hat nur zwei von 0 verschiedene Einträge

Inzidenzliste (I): Definition

- In <u>Inzidenzlisten</u> wird
  - Liste der Kanten angelegt
  - Jeder Listeneintrag hat zwei Elemente (Start- und Zielknoten der Kante)
- Beispiel:



Inzidenzliste (II): Bewertung

- Erlaubt Darstellung gerichteter wie ungerichteter Graphen
- Markierungen:
  - Kanten: Listenelement um Eintrag erweitern
  - Knoten: Separates Feld
- Lesende Operationen:
  - Schnelles Navigieren entlang der Kanten
  - Alle weiteren Operationen (z.B. Nachbarn) extrem aufwändig
  - Effizient, wenn Fortlaufend Informationen über Kanten relevant sind
- Ändernde Operationen:
  - Kanten einfügen und löschen effizient
  - Knotenänderungen aufwändig
- Speicherplatz:
  - Linear wachsend mit Anzahl Kanten, d.h. O(m)
  - Effizient bei Graphen mit wenigen Kanten

Andere Darstellungen

- Verschiedene andere Darstellungen aus Literatur bekannt:
  - Kantenliste
  - Implizite Darstellung
- Weiterhin:
  - Varianten von Adjazenzmatrix und –liste
  - Basieren auf redundanten, im konkreten Fall vorteilhaften Ergänzungen

Zusammenfassung (I)

- Definitionen:
  - Gerichtete und ungerichtete Graphen
  - Inzidenz und Adjazenz
  - Markierte Graphen
  - Kantenfolge, Kantenzug, Weg, Zyklus

- Operationen auf Graphen:
  - Hinzufügen/Entfernen von Knoten(mengen)
  - Hinzufügen/Entfernen von Kanten(mengen)
  - Fusion
  - Kontraktion

Zusammenfassung (II)

- Eigenschaften von Graphen:
  - Teilgraph, Untergraph
  - Zusammenhang
  - Brücke und Artikulation
  - Vollständige, bipartite, zyklische Graphen
  - Reguläre Graphen
  - Planare Graphen
  - Rand, Durchmesser, Radius und Zentrum
  - Isomorphie von Graphen

- Datenstrukturen zur Darstellung von Graphen:
  - Adjazenzmatrix
  - Adjazenzliste
  - Inzidenzmatrix
  - Inzidenzliste
  - Bewertung der Darstellungen
  - Andere Darstellungsformen

Übungen (I)

- **Aufgabe 1**

  Finden Sie im folgenden Rätsel fünf Begriffe aus diesem Vorlesungsabschnitt!

X	I	R	T	A	M	Z	N	E	D	I	Z	N	I	A	A	H	D	P	B
N	J	Z	T	Y	Q	N	B	J	L	N	F	B	K	L	F	P	H	G	P
A	I	Y	G	W	Q	Z	S	G	E	P	X	T	Z	Y	K	R	U	G	F
S	Y	Z	Q	V	O	N	G	Z	O	V	N	E	K	V	C	O	D	W	R
D	L	X	A	B	Y	S	A	S	Q	K	W	T	D	C	K	M	O	T	O
M	I	D	U	Y	T	J	L	K	R	A	J	K	N	C	O	O	X	A	Y
H	E	B	L	H	D	C	Y	F	X	O	R	X	O	N	I	S	Q	I	U
D	P	T	R	A	B	E	E	J	M	Y	Z	S	K	J	G	I	N	L	H
T	S	Q	Q	Z	W	U	Y	J	H	C	M	K	J	M	P	V	G	R	P
C	I	V	C	F	Q	E	N	B	F	G	B	J	S	T	T	A	B	G	W
U	J	T	Q	A	Y	O	P	Y	W	U	T	A	H	T	O	V	H	O	W
Y	B	J	R	M	Z	K	C	C	A	B	H	J	A	T	I	J	X	R	Y
F	J	N	Y	A	Y	K	F	A	Q	S	G	D	X	S	J	U	I	M	B
W	P	D	V	P	P	N	K	I	Q	J	L	V	O	O	Y	C	R	R	K
J	V	K	V	P	T	I	A	K	B	H	A	Q	W	K	A	T	J	X	Y
C	B	R	I	G	I	G	B	X	T	B	J	T	U	U	C	C	L	X	V
A	T	D	W	V	R	K	D	D	N	S	B	Z	I	N	W	B	Z	G	X
N	A	Z	M	W	D	N	S	A	P	Q	T	R	I	R	J	B	S	C	L
T	C	V	B	W	G	E	Q	I	I	Q	M	R	W	J	J	W	C	O	O
K	N	J	Z	T	W	Q	T	Z	X	P	T	P	D	Z	Y	K	L	U	S

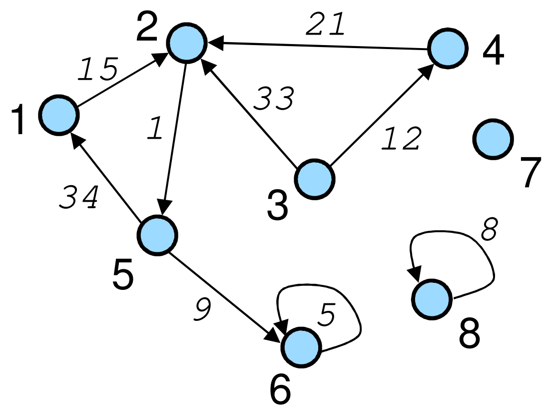
Übungen (II)

- **Aufgabe 2**
  a) Visualisieren Sie den Graphen G = ({1,2,3,4,5,6,7,8}, {{1,2}, {2,7}, {4}, {1,5}, {8}, {1,3}, {3,4}, {4,5}, {5,7}, {4,5}, {7}}.
  b) Welchen Grad hat G?
  c) Was liegt zwischen den Knoten 4 und 5 vor?
  d) Wie nennt man die Knoten {4}, {7} und {8}?
  e) Welchen Grad hat Knoten 5?
  f) Ist (1,3,4,5,1,2,7,5,1) ein Zyklus?
  g) Welche Eigenschaft hat Knoten 6?
  h) Wie viele Zusammenhangskomponenten hat G?
  i) Geben Sie die Adjazenzmatrix von G an!
  j) Geben Sie die Adjazenzliste von G mittels Feldern an!

Übungen (III)

- **Aufgabe 3**

  Gegeben sei der folgende gerichtete Graph G.



a) Geben Sie eine formale Notation des Graphen an!

b) Welchen Eingangsgrad hat Knoten 3?

c) Ist G zyklenfrei?

d) Welchen Ausgangsgrad hat Knoten 5?

e) Gibt es einen Weg von Knoten 4 nach Knoten 1?

f) Geben Sie die Adjazenzmatrix von G an!

g) Geben Sie die Adjazenzliste von G als verzeigerte Struktur an!

Übungen (IV)

- **Aufgabe 4**
  Zeichnen Sie den K_4, den $K_{3,3}$ und den C_5!
  Welche dieser Graphen sind planar?

- **Aufgabe 5**
  a) Zeichnen Sie den zu folgender Adjazenzmatrix gehörenden Graphen!

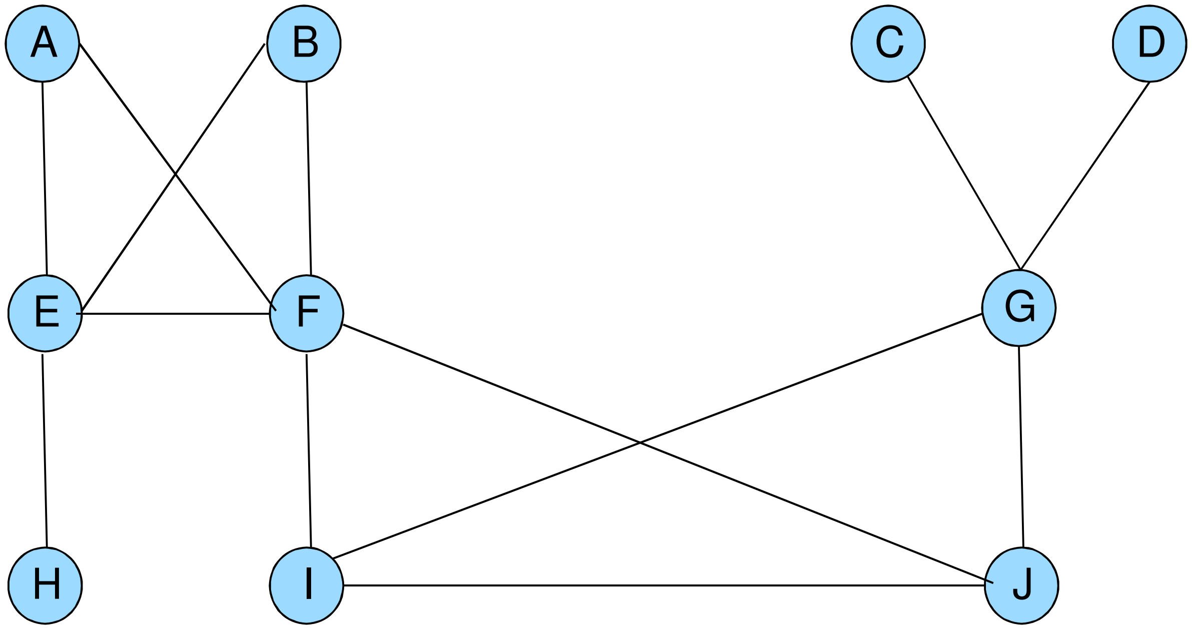
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  b) Stellen Sie den Graphen als Adjanzenzliste dar!

Übungen (V)

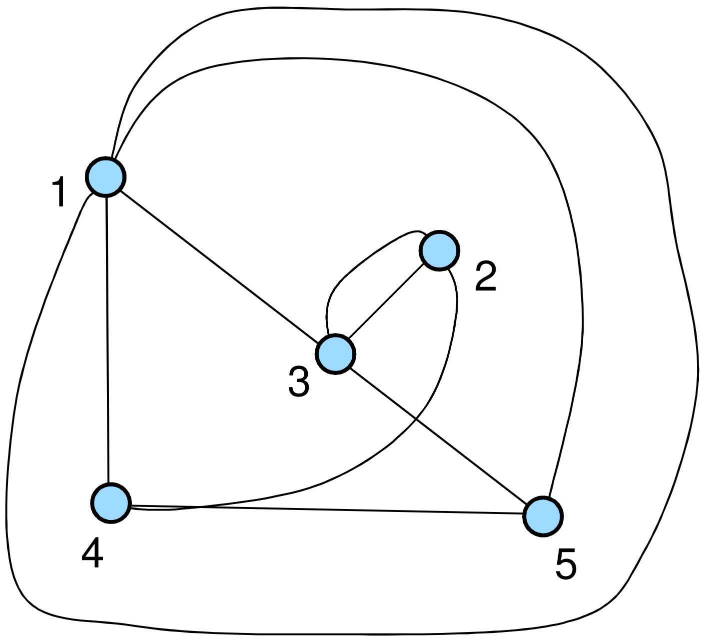
- **Aufgabe 6**

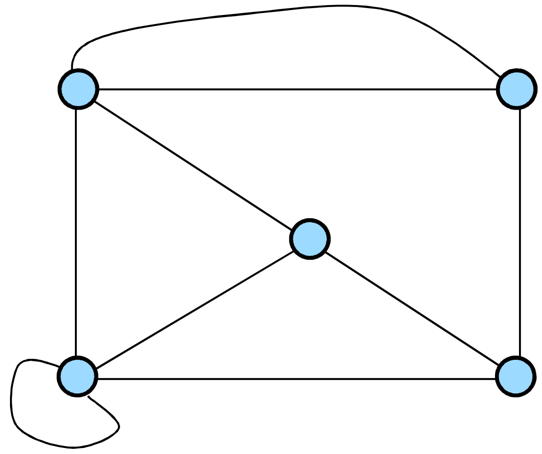
  Berechnen Sie für den folgenden Graphen Rand, Durchmesser, Radius und Zentrum!



Übungen (VI)

- **Aufgabe 7**
  Sind die beiden folgenden Graphen isomorph?





Übungen (VII)

- **Aufgabe 8**

  Lesen Sie sich die folgenden Aussagen genau durch und entscheiden Sie, ob sie wahr oder falsch sind. Eine richtige Antwort wird mit 1 Punkt bewertet, eine falsche Antwort mit einem halben Minuspunkt, gar keine Antwort mit 0 Punkten. Insgesamt kann jedoch bei dieser Aufgabe keine negative Punktzahl erreicht werden.

	Wahr	Falsch
Ein isolierter Knoten darf keine Schlingen haben.		
Zwischen zwei Knoten darf es höchstens eine Kante geben.		
Die Adjazenzmatrix verschenkt bei ungerichteten Graphen ca. die Hälfte des Speicherplatzes.		
Eine Kante umfasst ein bis beliebig viele Knoten.		
In einem Kantenzug kommt keine Kante mehrfach vor.		
Kantenmarkierungen lassen sich in der Adjazenzmatrix einfach darstellen.		
C_3 und K_3 sind identisch.		

Übungen (VIII)

	Wahr	Falsch
Ziel- und Endknoten sind synonyme Begriffe.		
In einem regulären Graphen hat jeder Knoten den gleichen Grad.		
Bipartite Graphen können nicht zu anderen Graphen isomorph sein.		
In Adjazenzlisten wird für jeden Knoten die Liste der Nachbarn abgespeichert.		
Die Beziehung von Knoten zu Kanten wird als Inzidenz bezeichnet.		
Der Eingangsgrad eines Knoten in einem gerichteten Graphen ist die Summe ein- und ausgehender Kanten.		
Zeit und Speicherplatz lassen sich meistens nicht gleichzeitig optimieren.		
C_n bezeichnet einen Kreis mit n Knoten.		
Adjazenzmatrix und –liste lassen sich in konkreten Fällen vorteilhaft um redundante Strukturen erweitern.		